Goniometrické funkcie

(repetitórium stredoškolskej matematiky)

zdroj: RNDr. Marián Macko, Matematika v dialógoch

http://www.galeje.sk/predmety/matematika/matematika-v-dialogoch/goniometricke-funkcie

Igor Fabrici/Jozef Kiseľák

12. septembra 2019

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- **Goniometria** (z gréč. gónia - uhol, roh a metron - merať) - oblasť matematiky, ktorá sa zaoberá goniometrickými funkciami

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- **Goniometria** (z gréč. gónia - uhol, roh a metron - merať) - oblasť matematiky, ktorá sa zaoberá goniometrickými funkciami
- **Trigonometria** (z gréč. trigónon – trojuholník) - oblasť goniometrie zaoberajúca sa praktickými úlohami súvisiacimi s uhlami a trojuholníkmi (rovinná trigonometria)

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- ČO JE UHOL ?

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- ČO JE UHOL ?
- Rovinný uhol je časť roviny ohraničená dvoma polpriamkami so spoločným začiatkom.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- ČO JE UHOL ?
- Rovinný uhol je časť roviny ohraničená dvoma polpriamkami so spoločným začiatkom.
- OK, ALE AKO 2 UHLY ROZLÍŠIŤ ?

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- ČO JE UHOL ?
- Rovinný uhol je časť roviny ohraničená dvoma polpriamkami so spoločným začiatkom.
- OK, ALE AKO 2 UHLY ROZLÍŠIŤ ?
- Napr. veľkosť uhla - potreba nejakej jednotky.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Staroveký Babylončania:

[1]Navrhnuté J. Thomsonom v roku 1871.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Staroveký Babylončania:
- uhlová miera - delenie plného uhla na 360 stupňov (360°).

[1]Navrhnuté J. Thomsonom v roku 1871.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Staroveký Babylončania:
- uhlová miera - delenie plného uhla na 360 stupňov (360°).
- Novoveký pohľad:

[1] Navrhnuté J. Thomsonom v roku 1871.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Staroveký Babylončania:
- uhlová miera - delenie plného uhla na 360 stupňov (360°).
- Novoveký pohľad:
- oblúková miera - jednotka radián[1].

[1] Navrhnuté J. Thomsonom v roku 1871.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Staroveký Babylončania:
- uhlová miera - delenie plného uhla na 360 stupňov (360°).
- Novoveký pohľad:
- oblúková miera - jednotka radián[1].
- 1 radián je stredový uhol, ktorý prislúcha oblúku s rovnakou dĺžkou, ako je polomer kružnice.

[1] Navrhnuté J. Thomsonom v roku 1871.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Staroveký Babylončania:
- uhlová miera - delenie plného uhla na 360 stupňov (360°).
- Novoveký pohľad:
- oblúková miera - jednotka radián[1].
- 1 radián je stredový uhol, ktorý prislúcha oblúku s rovnakou dĺžkou, ako je polomer kružnice.
- Plný uhol má 2π radiánov ($= 360^\circ$).

[1] Navrhnuté J. Thomsonom v roku 1871.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Goniometrické funkcie - funkcie merajúce uhly. Dajú sa použiť v pravouhlom trojuholníku, v ktorom sú zadané dve jeho strany.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Goniometrické funkcie - funkcie merajúce uhly. Dajú sa použiť v pravouhlom trojuholníku, v ktorom sú zadané dve jeho strany.
- Staroveké Grécko - jednoduchý aparát na určovanie času pomocou tyče vrhajúcej tieň určitej dĺžky (cotg).

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Goniometrické funkcie - funkcie merajúce uhly. Dajú sa použiť v pravouhlom trojuholníku, v ktorom sú zadané dve jeho strany.
- Staroveké Grécko - jednoduchý aparát na určovanie času pomocou tyče vrhajúcej tieň určitej dĺžky (cotg).
- Astronóm Hipparchos - tabuľka trigonometrických pomerov, resp. tetív (Ptolemaios).

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Goniometrické funkcie - funkcie merajúce uhly. Dajú sa použiť v pravouhlom trojuholníku, v ktorom sú zadané dve jeho strany.
- Staroveké Grécko - jednoduchý aparát na určovanie času pomocou tyče vrhajúcej tieň určitej dĺžky (cotg).
- Astronóm Hipparchos - tabuľka trigonometrických pomerov, resp. tetív (Ptolemaios).
- Trigonometrické veličiny - chápané postupne ako dĺžky, pomery, podiely čísel (zlomky) a čísla.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

Etymologický vývoj:

- Árjabhatta: arddhadžíva (džíva) - dĺžka polovice tetivy.

[2] Prsia, výstrih, vypuklosť.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

Etymologický vývoj:

- Árjabhatta: arddhadžíva (džíva) - dĺžka polovice tetivy.
- Arabský preklad: džiba $\Rightarrow$ džaib[2].

[2] Prsia, výstrih, vypuklosť.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

Etymologický vývoj:

- Árjabhatta: arddhadžíva (džíva) - dĺžka polovice tetivy.
- Arabský preklad: džiba $\Rightarrow$ džaib[2].
- 12. storočie, preklad do latinčiny: sinus.

[2] Prsia, výstrih, vypuklosť.

Etymologický vývoj:

- Árjabhatta: arddhadžíva (džíva) - dĺžka polovice tetivy.
- Arabský preklad: džiba $\Rightarrow$ džaib[2].
- 12. storočie, preklad do latinčiny: sinus.
- Árjabhatta: kótidžíva, t.j. sinus zvyšku $\Rightarrow$ džaib al-tamam $\Rightarrow$ sinus residui $\Rightarrow$ sinus complementi.

[2] Prsia, výstrih, vypuklosť.

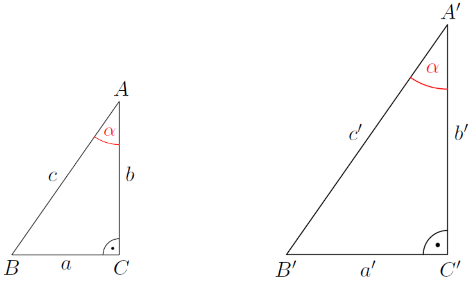
Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180° a jeden uhol má 90°, zvyšné uhly majú dokopy tiež 90°. Takže každý zo zvyšných uhlov musí byť menší ako 90° (nazýva sa ostrý uhol).

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180° a jeden uhol má 90°, zvyšné uhly majú dokopy tiež 90°. Takže každý zo zvyšných uhlov musí byť menší ako 90° (nazýva sa ostrý uhol).
- Označme veľkosť jedného z nich α. Existuje nekonečne veľa pravouhlých trojuholníkov s uhlom α a všetky sú navzájom podobné (podľa vety (uu) o podobnosti trojuholníkov).

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ



- Z podobnosti trojuholníkov vyplýva

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \text{ (koeficient podobnosti)}$$

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Z rovnosti $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{c'}{c}$ dostaneme $a' = \dfrac{ac'}{c}$ a následne $\dfrac{a'}{c'} = \dfrac{a}{c}$.

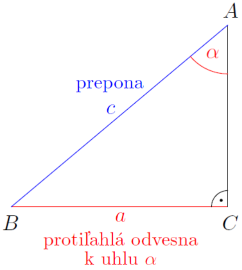
Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Z rovnosti $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{c'}{c}$ dostaneme $a' = \dfrac{ac'}{c}$ a následne $\dfrac{a'}{c'} = \dfrac{a}{c}$.
- Tento pomer dĺžok konkrétnych dvoch strán daného pravouhlého trojuholníka je číslo, ktoré závisí iba od veľkosti uhla α a je pre ktorýkoľvek z našich podobných pravouhlých trojuholníkov rovnaké.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Z rovnosti $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{c'}{c}$ dostaneme $a' = \dfrac{ac'}{c}$ a následne $\dfrac{a'}{c'} = \dfrac{a}{c}$.
- Tento pomer dĺžok konkrétnych dvoch strán daného pravouhlého trojuholníka je číslo, ktoré závisí iba od veľkosti uhla α a je pre ktorýkoľvek z našich podobných pravouhlých trojuholníkov rovnaké.
- To číslo charakterizuje iba veľkosť ostrého uhla α. Teda ostrému uhlu α sme priradili jediné číslo, ktoré sa rovná pomeru dĺžok konkrétnych dvoch strán pravouhlého trojuholníka.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom △



Sínus

Sínus ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžky protiľahlej odvesny ostrého uhla k dĺžke prepony.

$$\sin(\alpha) = \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

Kosínus

Kosínus ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžky priľahlej odvesny ostrého uhla k dĺžke prepony.

$$\cos(\alpha) = \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

Kosínus

Kosínus ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžky priľahlej odvesny ostrého uhla k dĺžke prepony.

$$\cos(\alpha) = \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Tangens

Tangens ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžok protiľahlej a priľahlej odvesny ostrého uhla.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

Kosínus

Kosínus ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžky priľahlej odvesny ostrého uhla k dĺžke prepony.

$$\cos(\alpha) = \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Tangens

Tangens ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžok protiľahlej a priľahlej odvesny ostrého uhla.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Kotangens

Kotangens ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžok priľahlej a protiľahlej odvesny ostrého uhla.

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Kosínus je pomer priľahlej odvesny k prepone. Priľahlá k uhlu β je odvesna a, teda: $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$ a využijúc $\beta = 90^\circ - \alpha$ dostaneme $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta) = \cos(90^\circ - \alpha)$.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Kosínus je pomer priľahlej odvesny k prepone. Priľahlá k uhlu β je odvesna a, teda: $\cos(\beta) = \dfrac{a}{c}$ a využijúc $\beta = 90^\circ - \alpha$ dostaneme $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c} = \cos(\beta) = \cos(90^\circ - \alpha)$.

Vzťahy medzi sin a cos resp. tg a cotg

$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha) \qquad \cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$$
$$\mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{cotg}(90^\circ - \alpha) \qquad \mathrm{cotg}(\alpha) = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$$

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

- Kosínus je pomer priľahlej odvesny k prepone. Priľahlá k uhlu β je odvesna a, teda: $\cos(\beta) = \dfrac{a}{c}$ a využijúc $\beta = 90^\circ - \alpha$ dostaneme $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c} = \cos(\beta) = \cos(90^\circ - \alpha)$.

Vzťahy medzi sin a cos resp. tg a cotg

$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha) \qquad \cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$$
$$\mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{cotg}(90^\circ - \alpha) \qquad \mathrm{cotg}(\alpha) = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$$

- Uvedené vlastnosti znamenajú, že funkcie kosínus a kotangens sa chápu ako doplňujúce funkcie k funkciám sínus a tangens.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

Úloha

Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C tak, aby platilo $c = 6$ a $\sin(\alpha) = \frac{3}{4}$.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

Úloha

Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C tak, aby platilo $c = 6$ a $\sin(\alpha) = \frac{3}{4}$.

Úloha

V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C je dané $a = 20$ a $\beta = 34^\circ$. Vypočítajte b a v_c.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

Úloha

Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C tak, aby platilo $c = 6$ a $\sin(\alpha) = \frac{3}{4}$.

Úloha

V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C je dané $a = 20$ a $\beta = 34^\circ$. Vypočítajte b a v_c.

Úloha

Uvažovaním rovnostranného trojuholníka vypočítajte $\sin(30^\circ)$, $\cos(30^\circ)$, $\mathrm{tg}(30^\circ)$, $\mathrm{cotg}(30^\circ)$.

Goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom Δ

Úloha

Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C tak, aby platilo $c = 6$ a $\sin(\alpha) = \frac{3}{4}$.

Úloha

V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C je dané $a = 20$ a $\beta = 34^\circ$. Vypočítajte b a v_c.

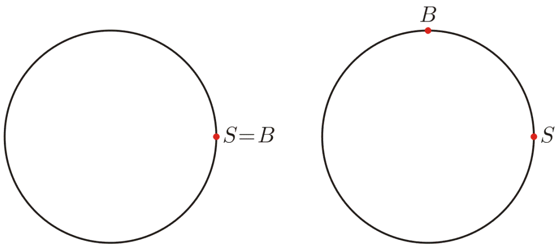
Úloha

Uvažovaním rovnostranného trojuholníka vypočítajte $\sin(30^\circ)$, $\cos(30^\circ)$, $\mathrm{tg}(30^\circ)$, $\mathrm{cotg}(30^\circ)$.

Úloha

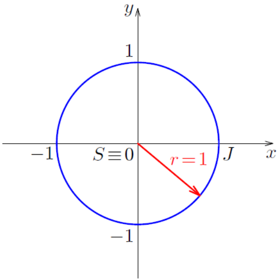
Je daná kružnica $k(S, r)$, kde $r = 3$, a bod M s $|MS| = 7$. Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý zvierajú dotyčnice z bodu M ku kružnici k.

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu



- Je daný kruhový ovál dĺžky d so štartom S. Akú vzdialenosť zabehol bežec B?

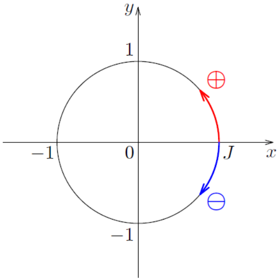
Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu



Jednotková kružnica

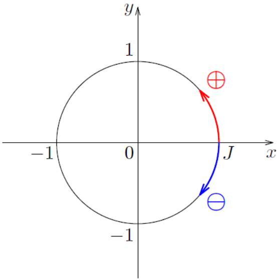
Uvažujeme kružnicu so stredom v počiatku súradnicovej sústavy, ktorá má polomer jednotkovej dĺžky. Pre naše úvahy bude dôležitý jej priesečník $J = [1, 0]$ s kladnou polosou x.

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu



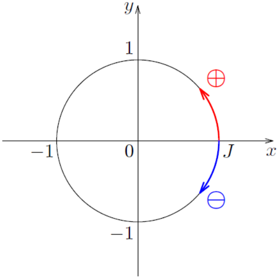
- Definujeme zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu priradí na jednotkovej kružnici práve jeden bod.

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu



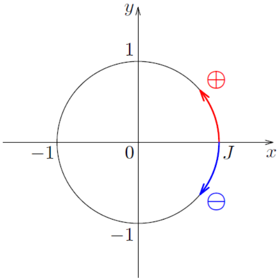
- Definujeme zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu priradí na jednotkovej kružnici práve jeden bod.
- číslu 0 priradíme bod J.

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu



- Definujeme zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu priradí na jednotkovej kružnici práve jeden bod.
- číslu 0 priradíme bod J.
- $x > 0$ priradíme taký bod M jednotkovej kružnice, že dĺžka oblúka JM v kladnom zmysle je práve x.

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu



- Definujeme zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu priradí na jednotkovej kružnici práve jeden bod.
- číslu 0 priradíme bod J.
- $x > 0$ priradíme taký bod M jednotkovej kružnice, že dĺžka oblúka JM v kladnom zmysle je práve x.
- $x < 0$ priradíme taký bod M jednotkovej kružnice, že dĺžka oblúka JM v zápornom zmysle je práve $|x|$.

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

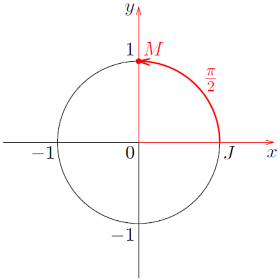
- Ktorý bod bude priradený číslu $x = \dfrac{\pi}{2}$?

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

- Ktorý bod bude priradený číslu $x = \dfrac{\pi}{2}$?
- Dĺžka jednotkovej kružnice je $2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$, $\frac{\pi}{2}$ je teda štvrtinou tejto dĺžky a pri kladnom čísle meriame v kladnom zmysle, takže číslu $x = \frac{\pi}{2}$ bude priradený bod $M = [0, 1]$.

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

- Ktorý bod bude priradený číslu $x = \dfrac{\pi}{2}$?
- Dĺžka jednotkovej kružnice je $2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$, $\frac{\pi}{2}$ je teda štvrtinou tejto dĺžky a pri kladnom čísle meriame v kladnom zmysle, takže číslu $x = \frac{\pi}{2}$ bude priradený bod $M = [0, 1]$.



- $x = \frac{\pi}{2}$ navyše vyjadruje veľkosť uhla $\sphericalangle JOM$ v radiánoch.

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

prevod stupňov na radiány

$$r = s \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}$$

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

prevod stupňov na radiány

$$r = s \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}$$

prevod radiánov na stupne

$$s = r \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}$$

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

prevod stupňov na radiány

$$r = s \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}$$

prevod radiánov na stupne

$$s = r \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}$$

- Koľko radiánov je 135°?

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

prevod stupňov na radiány

$$r = s \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}$$

prevod radiánov na stupne

$$s = r \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}$$

- Koľko radiánov je 135°?
- 135° je $135^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{2 \cdot 135^\circ \cdot \pi}{360^\circ} = \frac{270^\circ}{360^\circ}\pi = \frac{3}{4}\pi$

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

prevod stupňov na radiány

$$r = s \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}$$

prevod radiánov na stupne

$$s = r \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}$$

- Koľko radiánov je 135°?
- 135° je $135^\circ \cdot \dfrac{2\pi}{360^\circ} = \dfrac{2 \cdot 135^\circ \cdot \pi}{360^\circ} = \dfrac{270^\circ}{360^\circ}\pi = \dfrac{3}{4}\pi$
- Koľko stupňov je $\dfrac{5}{3}\pi$?

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

prevod stupňov na radiány

$$r = s \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}$$

prevod radiánov na stupne

$$s = r \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}$$

- Koľko radiánov je 135°?
- 135° je $135^\circ \cdot \dfrac{2\pi}{360^\circ} = \dfrac{2 \cdot 135^\circ \cdot \pi}{360^\circ} = \dfrac{270^\circ}{360^\circ}\pi = \dfrac{3}{4}\pi$
- Koľko stupňov je $\dfrac{5}{3}\pi$?
- $\dfrac{5}{3}\pi$ je $\dfrac{5}{3}\pi \cdot \dfrac{360^\circ}{2\pi} = \dfrac{5\pi \cdot 360^\circ}{3 \cdot 2\pi} = 300^\circ$

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

Úloha

Ktoré body jednotkovej kružnice sú priradené číslam $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{19}{2}\pi$?

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

Úloha

Ktoré body jednotkovej kružnice sú priradené číslam $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{19}{2}\pi$?

- Uvedené zobrazenie z množiny reálnych čísel na body jednotkovej kružnice nie je injektívne (dvom rôznym reálnym číslam môže priradiť ten istý bod).

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

Úloha

Ktoré body jednotkovej kružnice sú priradené číslam $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{19}{2}\pi$?

- Uvedené zobrazenie z množiny reálnych čísel na body jednotkovej kružnice nie je injektívne (dvom rôznym reálnym číslam môže priradiť ten istý bod).
- Toto zobrazenie je však surjektívne (každý bod jednotkovej kružnice je priradený nejakému reálnemu číslu).

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

Úloha

Ktoré body jednotkovej kružnice sú priradené číslam $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{19}{2}\pi$?

- Uvedené zobrazenie z množiny reálnych čísel na body jednotkovej kružnice nie je injektívne (dvom rôznym reálnym číslam môže priradiť ten istý bod).
- Toto zobrazenie je však surjektívne (každý bod jednotkovej kružnice je priradený nejakému reálnemu číslu).

Úloha

Určte všetky reálne čísla, ktorým je priradený rovnaký bod jednotkovej kružnice ako číslu $\frac{\pi}{2}$.

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

Úloha

Ktoré body jednotkovej kružnice sú priradené číslam $x = \dfrac{2\pi}{5} - \dfrac{k\pi}{4}$, kde $k \in \mathbb{R}$?

Zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na jednotkovú kružnicu

Úloha

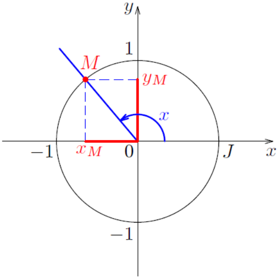
Ktoré body jednotkovej kružnice sú priradené číslam $x = \frac{2\pi}{5} - \frac{k\pi}{4}$, kde $k \in \mathbb{R}$?

Úloha

Určte všetky reálne čísla a, pre ktoré je číslam $\frac{2\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{4} - \frac{a\pi}{5}$ priradený rovnaký bod jednotkovej kružnice.

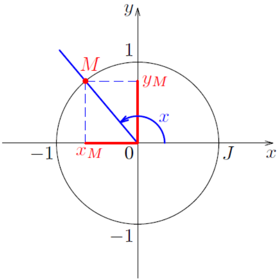
Definícia funkcie sínus a kosínus

- Už sme definovali zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu x priradí bod $M = [x_M, y_M]$ jednotkovej kružnice.



Definícia funkcie sínus a kosínus

- Už sme definovali zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu x priradí bod $M = [x_M, y_M]$ jednotkovej kružnice.



Sínus a kosínus

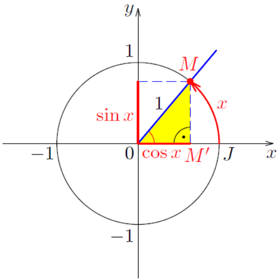
$$\sin(x) = y_M, \quad \cos(x) = x_M$$

Definícia funkcie sínus a kosínus

- Ukážeme si, že definícia sin a cos na jednotkovej kružnici zodpovedá definícii pre ostrý uhol v pravouhlom trojuholníku.

Definícia funkcie sínus a kosínus

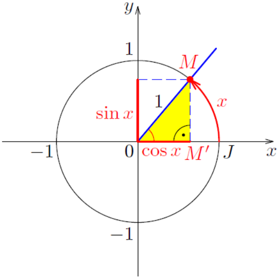
- Ukážeme si, že definícia sin a cos na jednotkovej kružnici zodpovedá definícii pre ostrý uhol v pravouhlom trojuholníku.



- V pravouhlom trojuholníku s ostrým uhlom x má protiľahlá odvesna veľkosť $|MM'| = y_M$ a prepona má veľkosť $|OM| = 1$.

Definícia funkcie sínus a kosínus

- Ukážeme si, že definícia sin a cos na jednotkovej kružnici zodpovedá definícii pre ostrý uhol v pravouhlom trojuholníku.



- V pravouhlom trojuholníku s ostrým uhlom x má protiľahlá odvesna veľkosť $|MM'| = y_M$ a prepona má veľkosť $|OM| = 1$.
- Potom $\sin(x) = \dfrac{|MM'|}{|OM|} = \dfrac{y_M}{1} = y_M$.

Definícia funkcie sínus a kosínus

- Kedže nekonečnému počtu reálnych čísel v tvare $x = x_0 + 2k\pi$ vždy priradíme ten istý bod na jednotkovej kružnici, budú sa hodnoty funkcií sin a cos, ktoré sú určené súradnicami tohto bodu, pravidelne opakovať.

Definícia funkcie sínus a kosínus

- Kedže nekonečnému počtu reálnych čísel v tvare $x = x_0 + 2k\pi$ vždy priradíme ten istý bod na jednotkovej kružnici, budú sa hodnoty funkcií sin a cos, ktoré sú určené súradnicami tohto bodu, pravidelne opakovať.
- To znamená, že dané funkcie sú periodické a ich najmenšia perióda je dĺžka jednotkovej kružnice, t.j. 2π.

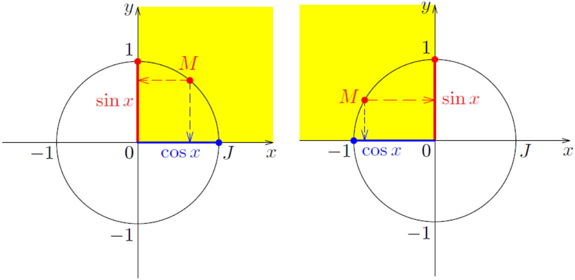
Definícia funkcie sínus a kosínus

- Kedže nekonečnému počtu reálnych čísel v tvare $x = x_0 + 2k\pi$ vždy priradíme ten istý bod na jednotkovej kružnici, budú sa hodnoty funkcií sin a cos, ktoré sú určené súradnicami tohto bodu, pravidelne opakovať.
- To znamená, že dané funkcie sú periodické a ich najmenšia perióda je dĺžka jednotkovej kružnice, t.j. 2π.

periodickosť sin a cos

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$

Definícia funkcie sínus a kosínus



znamienka sin a cos

x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$\sin(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Definícia funkcie sínus a kosínus

dôležité hodnoty sin a cos

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

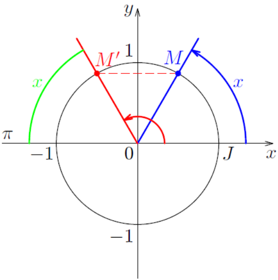
dôležité hodnoty sin a cos

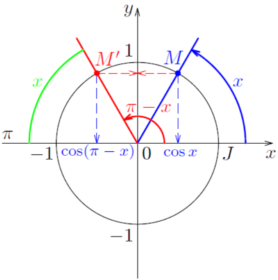
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

pre lepšie zapamätanie

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Definícia funkcie sínus a kosínus

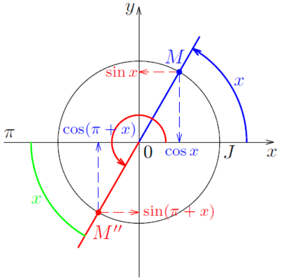


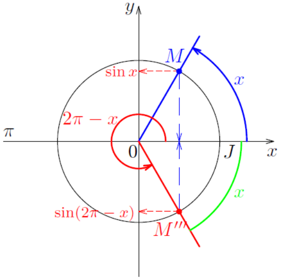


symetria sin a cos

$$\sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

Definícia funkcie sínus a kosínus





symetria sin a cos

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x), \quad \cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin(x), \quad \cos(2\pi - x) = \cos(x)$$

Úloha

Zistite, či -0.4, 3 alebo $\frac{\sqrt{5}}{2}$ môže byť hodnotou funkcie sin (pre nejaké reálne x).

Definícia funkcie sínus a kosínus

Úloha

Zistite, či -0.4, 3 alebo $\frac{\sqrt{5}}{2}$ môže byť hodnotou funkcie sin (pre nejaké reálne x).

Úloha

Do ktorého kvadrantu patrí M, ak $\sin(x) < 0$ a $\cos(x) = 0.6$?

Definícia funkcie sínus a kosínus

Úloha

Zistite, či -0.4, 3 alebo $\frac{\sqrt{5}}{2}$ môže byť hodnotou funkcie sin (pre nejaké reálne x).

Úloha

Do ktorého kvadrantu patrí M, ak $\sin(x) < 0$ a $\cos(x) = 0.6$?

Úloha

Pre ktoré x platí $\sin(x) = \cos(x)$?

Definícia funkcie sínus a kosínus

Úloha

Zistite, či -0.4, 3 alebo $\frac{\sqrt{5}}{2}$ môže byť hodnotou funkcie sin (pre nejaké reálne x).

Úloha

Do ktorého kvadrantu patrí M, ak $\sin(x) < 0$ a $\cos(x) = 0.6$?

Úloha

Pre ktoré x platí $\sin(x) = \cos(x)$?

Úloha

Vypočítajte $\sin(\frac{16\pi}{3})$.

Grafy funkcií sínus a kosínus

- Začneme najskôr grafom funkcie sínus. Funkčné hodnoty nebudeme počítať, ale získame ich graficky z jednotkovej kružnice pre dostatočný počet hodnôt argumentu x. Jednotkovú kružnicu rozdelíme na 24 rovnakých častí, ktorým bude odpovedať 24 hodnôt argumentu z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Grafy funkcií sínus a kosínus

- Začneme najskôr grafom funkcie sínus. Funkčné hodnoty nebudeme počítať, ale získame ich graficky z jednotkovej kružnice pre dostatočný počet hodnôt argumentu x. Jednotkovú kružnicu rozdelíme na 24 rovnakých častí, ktorým bude odpovedať 24 hodnôt argumentu z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.
- Tieto čísla majú tvar $x = k\frac{2\pi}{24} = \frac{k\pi}{12}$, kde $k \in \{0, 1, \ldots, 24\}$.

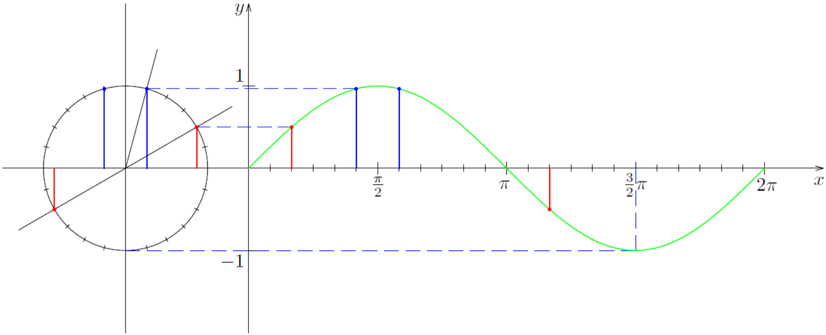
Grafy funkcií sínus a kosínus

- Začneme najskôr grafom funkcie sínus. Funkčné hodnoty nebudeme počítať, ale získame ich graficky z jednotkovej kružnice pre dostatočný počet hodnôt argumentu x. Jednotkovú kružnicu rozdelíme na 24 rovnakých častí, ktorým bude odpovedať 24 hodnôt argumentu z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.
- Tieto čísla majú tvar $x = k\frac{2\pi}{24} = \frac{k\pi}{12}$, kde $k \in \{0, 1, \dots, 24\}$.
- Geometricky to znamená rozdeliť stredový uhol po 15°.

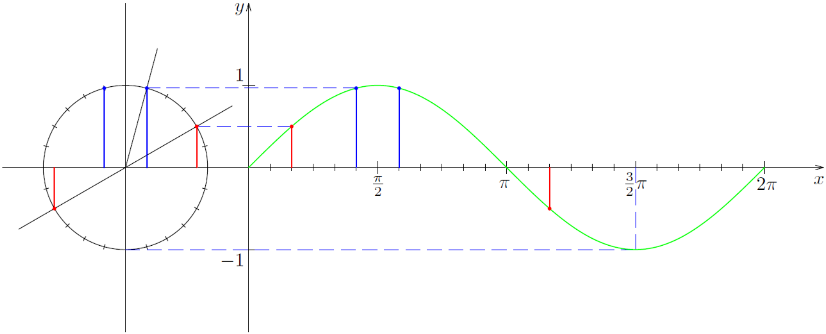
Grafy funkcií sínus a kosínus

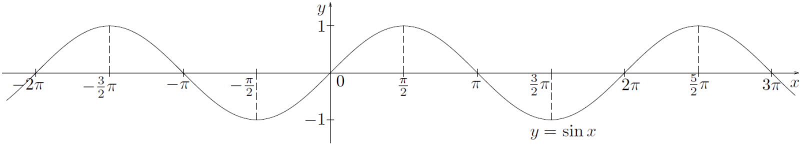
- Začneme najskôr grafom funkcie sínus. Funkčné hodnoty nebudeme počítať, ale získame ich graficky z jednotkovej kružnice pre dostatočný počet hodnôt argumentu x. Jednotkovú kružnicu rozdelíme na 24 rovnakých častí, ktorým bude odpovedať 24 hodnôt argumentu z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.
- Tieto čísla majú tvar $x = k\frac{2\pi}{24} = \frac{k\pi}{12}$, kde $k \in \{0, 1, \ldots, 24\}$.
- Geometricky to znamená rozdeliť stredový uhol po 15°.
- Tento základný graf na intervale potom skopírujeme na ďalšie intervaly.

Grafy funkcií sínus a kosínus

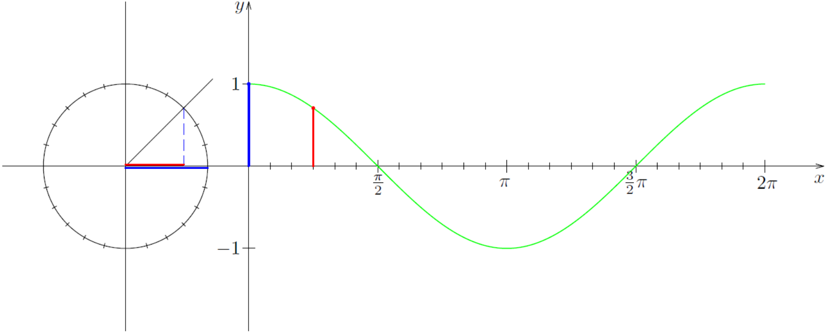


Grafy funkcií sínus a kosínus

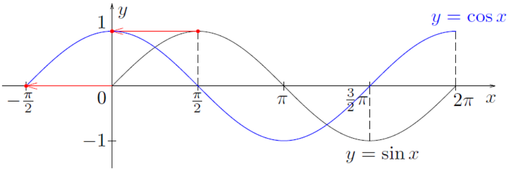




Grafy funkcií sínus a kosínus

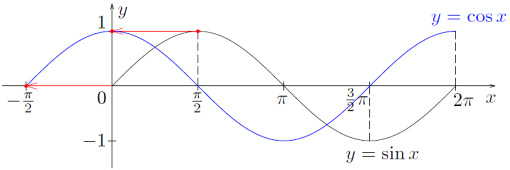


Grafy funkcií sínus a kosínus



- Kosínusoida vznikla posunutím sínusoidy v smere zápornej polosi x o $\frac{\pi}{2}$.

Grafy funkcií sínus a kosínus



- Kosínusoida vznikla posunutím sínusoidy v smere zápornej polosi x o $\frac{\pi}{2}$.

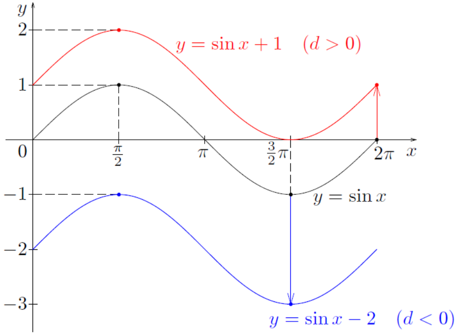
vzťah sin a cos

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

Grafy funkcií sínus a kosínus

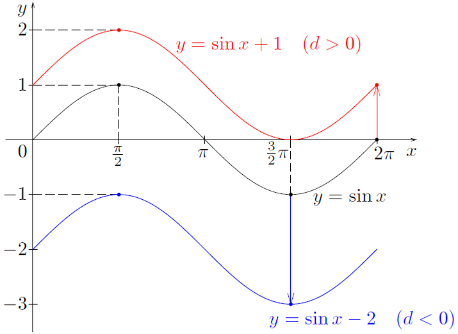
- Uvažujme funkciu $f(x) = a\sin(b(x+c)) + d$,
  resp. jej 4 špeciálne prípady:
  $\sin(x) + d$, $\sin(x+c)$, $a\sin(x)$, $\sin(bx)$.

Grafy funkcií sínus a kosínus



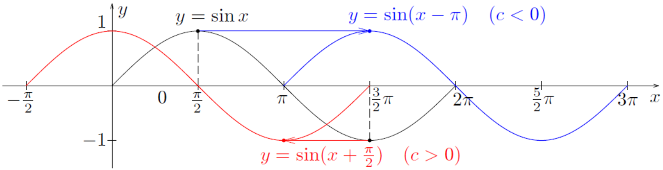
- Pre $d > 0$ sa graf posunie o d pozdĺž osi y nahor,

Grafy funkcií sínus a kosínus



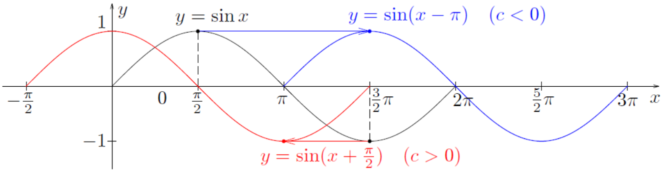
- Pre $d > 0$ sa graf posunie o d pozdĺž osi y nahor,
- pre $d < 0$ sa graf posunie o $|d|$ pozdĺž osi y nadol.

Grafy funkcií sínus a kosínus



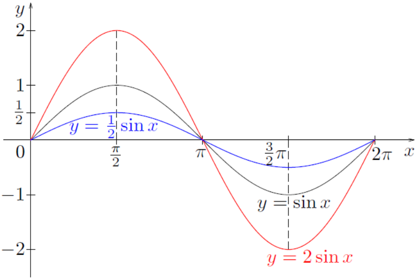
- Pre $c > 0$ sa graf posunie o c pozdĺž osi x doľava,

Grafy funkcií sínus a kosínus



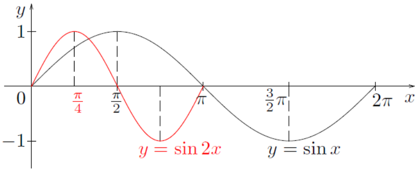
- Pre $c > 0$ sa graf posunie o c pozdĺž osi x doľava,
- pre $c < 0$ sa graf posunie o $|c|$ pozdĺž osi y doprava.

Grafy funkcií sínus a kosínus



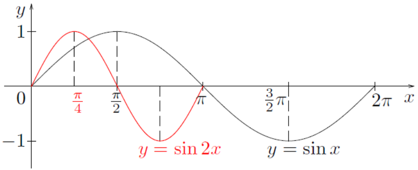
- Graf sa $|a|$-krát natiahne resp. stlačí v smere osi y a zároveň sa zobrazí osovo súmerne podľa osi x, ak $a < 0$.

Grafy funkcií sínus a kosínus



- Graf sa $|b|$-krát natiahne resp. stlačí v smere osi x a zároveň sa zobrazí osovo súmerne podľa osi y, ak $b < 0$.

Grafy funkcií sínus a kosínus

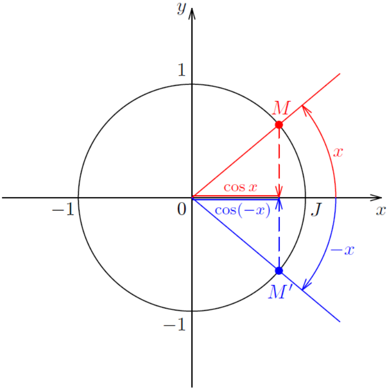


- Graf sa $|b|$-krát natiahne resp. stlačí v smere osi x a zároveň sa zobrazí osovo súmerne podľa osi y, ak $b < 0$.
- Perióda sa $|b|$-krát zmenší (pre $b > 1$) resp. $\frac{1}{|b|}$-krát zväčší (pre $b < 1$).

Úloha

Načrtnite graf funkcie $-\sin(2x - \pi)$.

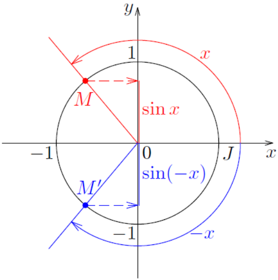
Vlastnosti funkcií sínus a kosínus



kosínus je párna funkcia

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

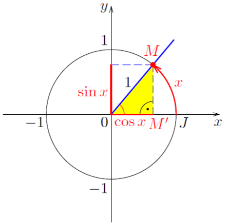
Vlastnosti funkcií sínus a kosínus



sínus je nepárna funkcia

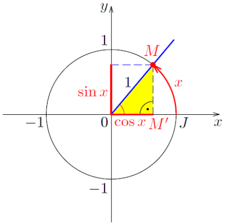
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Definícia funkcie tangens a kotangens



- V pravouhlom trojuholníku OMM' s ostrým uhlom x má protiľahlá odvesna dĺžku $|MM'| = \sin(x)$, priľahlá odvesna má dĺžku $|OM| = \cos(x)$ a prepona má dĺžku $|OM'| = 1$.

Definícia funkcie tangens a kotangens

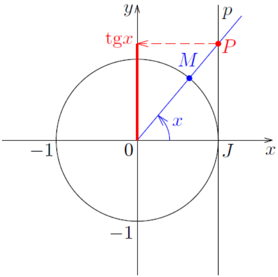


- V pravouhlom trojuholníku OMM' s ostrým uhlom x má protiľahlá odvesna dĺžku $|MM'| = \sin(x)$, priľahlá odvesna má dĺžku $|OM| = \cos(x)$ a prepona má dĺžku $|OM'| = 1$.

Tangens a kotangens

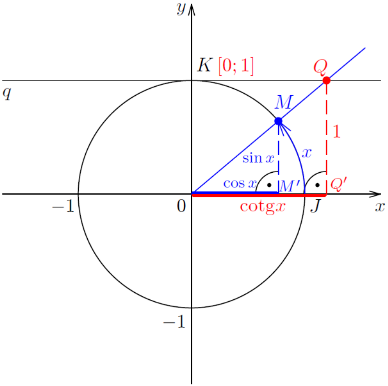
$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Definícia funkcie tangens a kotangens



- Pravouhlé trojuholníky OMM' a OPJ sú podobné, teda $\dfrac{|PJ|}{|OJ|} = \dfrac{|MM'|}{|OM'|}$, čo je vlastne $\dfrac{\mathrm{tg}(x)}{1} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Definícia funkcie tangens a kotangens



Definícia funkcie tangens a kotangens

znamienka tg a cotg

x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$\sin(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\mathrm{tg}(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\mathrm{cotg}(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Definícia funkcie tangens a kotangens

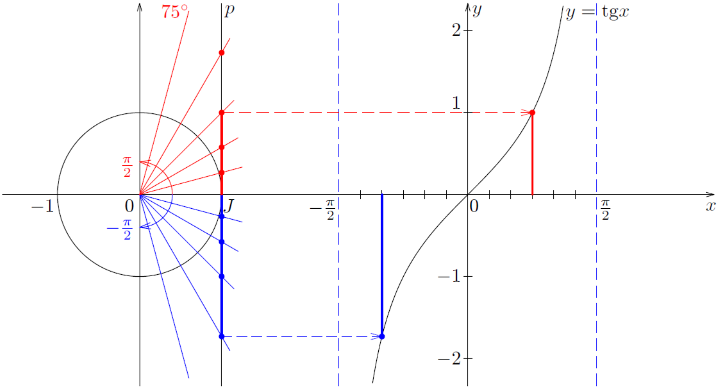
znamienka tg a cotg

x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$\sin(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\mathrm{tg}(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\mathrm{cotg}(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

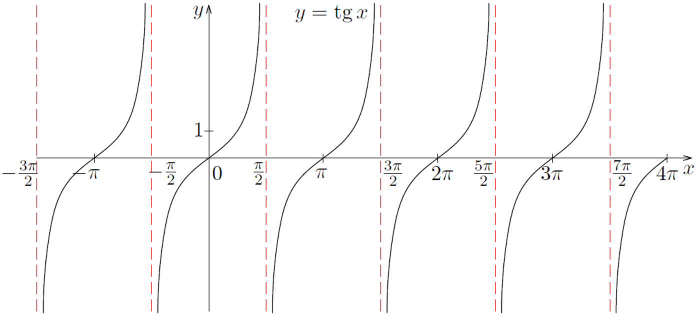
vzťah tg a cotg

$$\mathrm{tg}(x) \cdot \mathrm{cotg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 1 \text{ (pre } x \neq \frac{k\pi}{2})$$

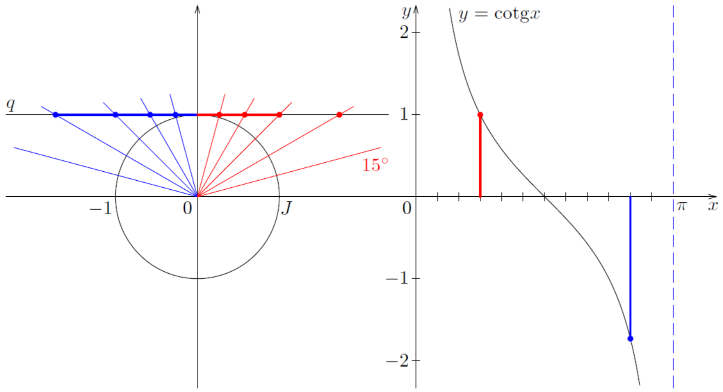
Grafy funkcií tangens a kotangens



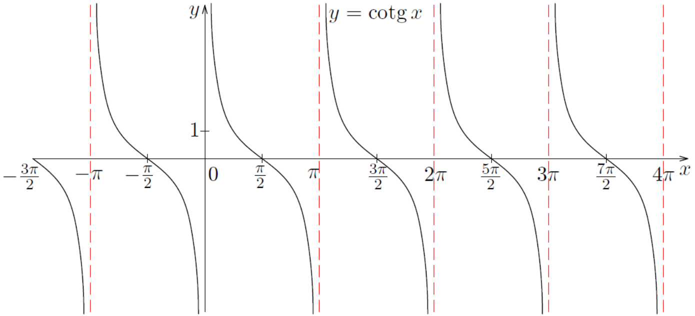
Grafy funkcií tangens a kotangens



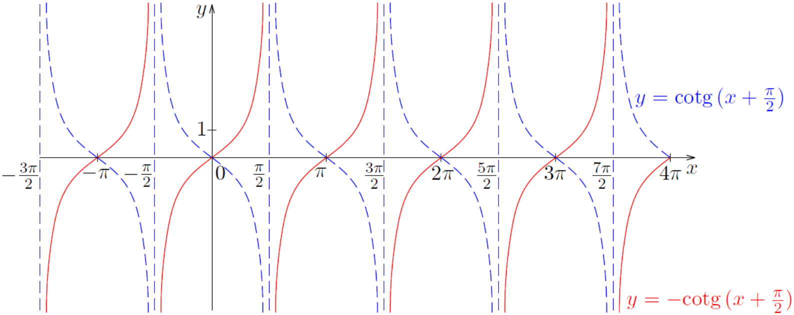
Grafy funkcií tangens a kotangens



Grafy funkcií tangens a kotangens



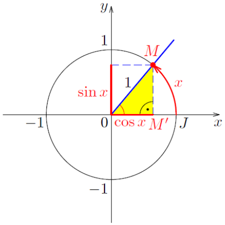
Grafy funkcií tangens a kotangens



vzťah tg a cotg

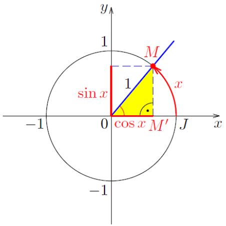
$$\text{cotg}(x) = -\,\text{tg}(x + \frac{\pi}{2})$$

Vzťahy medzi goniometrickými funkciami



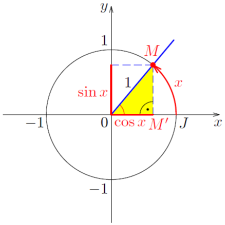
- V pravouhlom trojuholníku OMM' s ostrým uhlom x má protiľahlá odvesna dĺžku $|MM'| = \sin(x)$, priľahlá odvesna má dĺžku $|OM| = \cos(x)$ a prepona má dĺžku $|OM'| = 1$.

Vzťahy medzi goniometrickými funkciami



- V pravouhlom trojuholníku OMM' s ostrým uhlom x má protiľahlá odvesna dĺžku $|MM'| = \sin(x)$, priľahlá odvesna má dĺžku $|OM| = \cos(x)$ a prepona má dĺžku $|OM'| = 1$.
- Z Pytagorovej vety dostávame: $|MM'|^2 + |OM|^2 = |OM'|^2$, teda

Vzťahy medzi goniometrickými funkciami



- V pravouhlom trojuholníku OMM' s ostrým uhlom x má protiľahlá odvesna dĺžku $|MM'| = \sin(x)$, priľahlá odvesna má dĺžku $|OM| = \cos(x)$ a prepona má dĺžku $|OM'| = 1$.
- Z Pytagorovej vety dostávame: $|MM'|^2 + |OM|^2 = |OM'|^2$, teda

Sínus a kosínus

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1 \text{ (resp. } \sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

Úloha

Vypočítajte hodnoty $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{cotg}(x)$, ak $\mathrm{tg}(x) = -\frac{15}{8}$ a $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Vzťahy medzi goniometrickými funkciami

Úloha

Vypočítajte hodnoty $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{cotg}(x)$, ak $\operatorname{tg}(x) = -\frac{15}{8}$ a $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Úloha

Zjednodušte $\dfrac{\sin(x) - \sin^3(x)}{\cos(x) - \cos^3(x)}$.

Úloha

Vypočítajte hodnoty $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{cotg}(x)$, ak $\mathrm{tg}(x) = -\frac{15}{8}$ a $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Úloha

Zjednodušte $\dfrac{\sin(x) - \sin^3(x)}{\cos(x) - \cos^3(x)}$.

Úloha

Riešte v $\mathbb{R}$: $2\sin^2(x) + 3\cos(x) = 0$.

Súčtové vzorce

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y)$$

Súčtové vzorce

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$$

Súčtové vzorce

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Súčtové vzorce

Úloha

Vypočítajte hodnotu $\sin(75^\circ)$.

Súčtové vzorce

Úloha

Vypočítajte hodnotu $\sin(75^\circ)$.

Úloha

Pre vnútorné uhly ostrouhlého trojuholníka ABC platí $\sin(\alpha) = \frac{7}{25}$ a $\sin(\beta) = \frac{3}{5}$. Vypočítajte $\sin(\gamma)$.